

المتتاليات — الإشتقاق والتكامل
حساب المثلثات — الأعداد الأولية
النهايات — التحويلات النقطية
الموافقات — الأعداد المركبة

1

دنان عمر

المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية

	المتتاليات الحسابية	المتتاليات الهندسية
تعريف	$U_{n+1} = U_n + r, \quad r \in R$	$U_{n+1} = U_n . q \quad , q \in IR$
الأساس	r	q
الحد العام	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = U_0 . q^n \ , \ U_n = U_p . q^{n-p}$
المجموع $S = U_0 + \cdots + U_n$	$S = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$	$S = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1$
النهايات	إذا كان $r > 0$ فإن: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ إذا كان $r < 0$ فإن: $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$	إذا كان $\|q\| < 1$ فإن: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$، U متقاربة إذا كان $q > 1$ فإن: U متباعدة

اتجاه تغيير متتالية

تكون المتتالية العددية U :

– متزايدة إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n \geq 0$

– متناقصة إذا كان من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n \leq 0$

– ثابتة إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = 0$

تكون c,b,a ثلاث حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$

تكون c,b,a ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا كان $ac = b^2$

إذا كانت f دالة من الشكل	$f(x) = \frac{U'}{\sqrt{U}}$	$f(x) = \frac{U'}{U^n}$ $(n \in N, n \geq 2)$	$f(x) = U'. U^n$
فإن الدالة الأصلية لـ f هي :	$F(x) = 2\sqrt{U} + C$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)U^{n-1}} + C$	$F(x) = \frac{U^{n+1}}{n+1} + C$

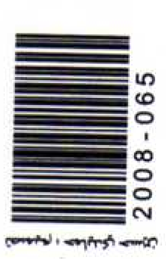
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = cos(x)$	$f(x) = sin(x)$
$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$F(x) = sin(x) + C$	$F(x) = - cos(x) + C$
$]0, +\infty[$ $]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$	R	R

مشتق الدوال المألوفة

الدالة	مجموعة تعريفها	الدالة المشتقة	مجال اشتقاقها
$f(x) = ax + b$	R	$f'(x) = a$	R
$f(x) = x^n$	R	$f'(x) = n x^{n-1}$	R
$f(x) = \frac{1}{x}$	R*	$f'(x) = - \frac{1}{x^2}$	R*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	R*	$f'(x) = - \frac{n}{x^{n+1}}$	R*
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = cos(x)$	R	$f'(x) = - sin(x)$	R
$f(x) = sin(x)$	R	$f'(x) = cos(x)$	R



حي الكيفان، عمارة أ، مدخل 10 محل 23، المحمدية، الجزائر.
الهاتف: 021 82 00 15 / 021 82 96 37، الفاكس: 021 82 96 37.
البريد الإلكتروني: clicedition@gmail.com



حساب المثلثات

■ $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

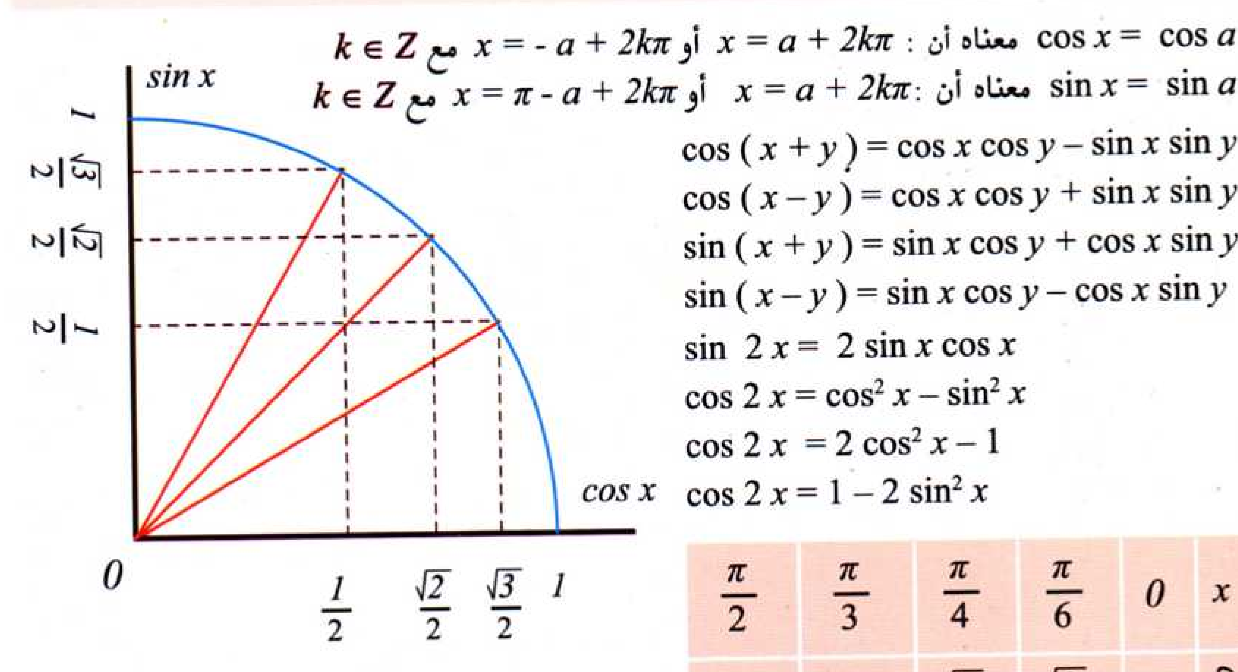
$\cos(-x) = \cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

sin
$M(\pi - x)$ $M(x)$
cos
$M(\pi + x)$ $M(-x)$

$\sin(-x) = -\sin x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
مع $k \in Z$

$\cos x = \cos a$ معناه أن : $x = a + 2k\pi$ أو $x = -a + 2k\pi$ مع $k \in Z$

$\sin x = \sin a$ معناه أن : $x = a + 2k\pi$ أو $x = \pi - a + 2k\pi$ مع $k \in Z$



$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

الزوايا الشهيرة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

الموافقات في Z

■ **تعريف :** n عدد طبيعي غير معدوم، نقول أن العددان الصحيحان a و b متوافقان بترديد n يعني أن للعددين a و b نفس الباقي في القسمة الإقليدية على n و نكتب :

$a \equiv b\,[n]$ ونقرأ a يوافق b بترديد n

■ **خواص :** a, b, c, d أعداد صحيحة n و p عددان طبيعيان غير معدومين.

$a \equiv a\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$ فإن $a + c \equiv b + d\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$ فإن $a.c \equiv b.d\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a.c \equiv b.c\,[n]$

إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $a^p \equiv b^p\,[n]$

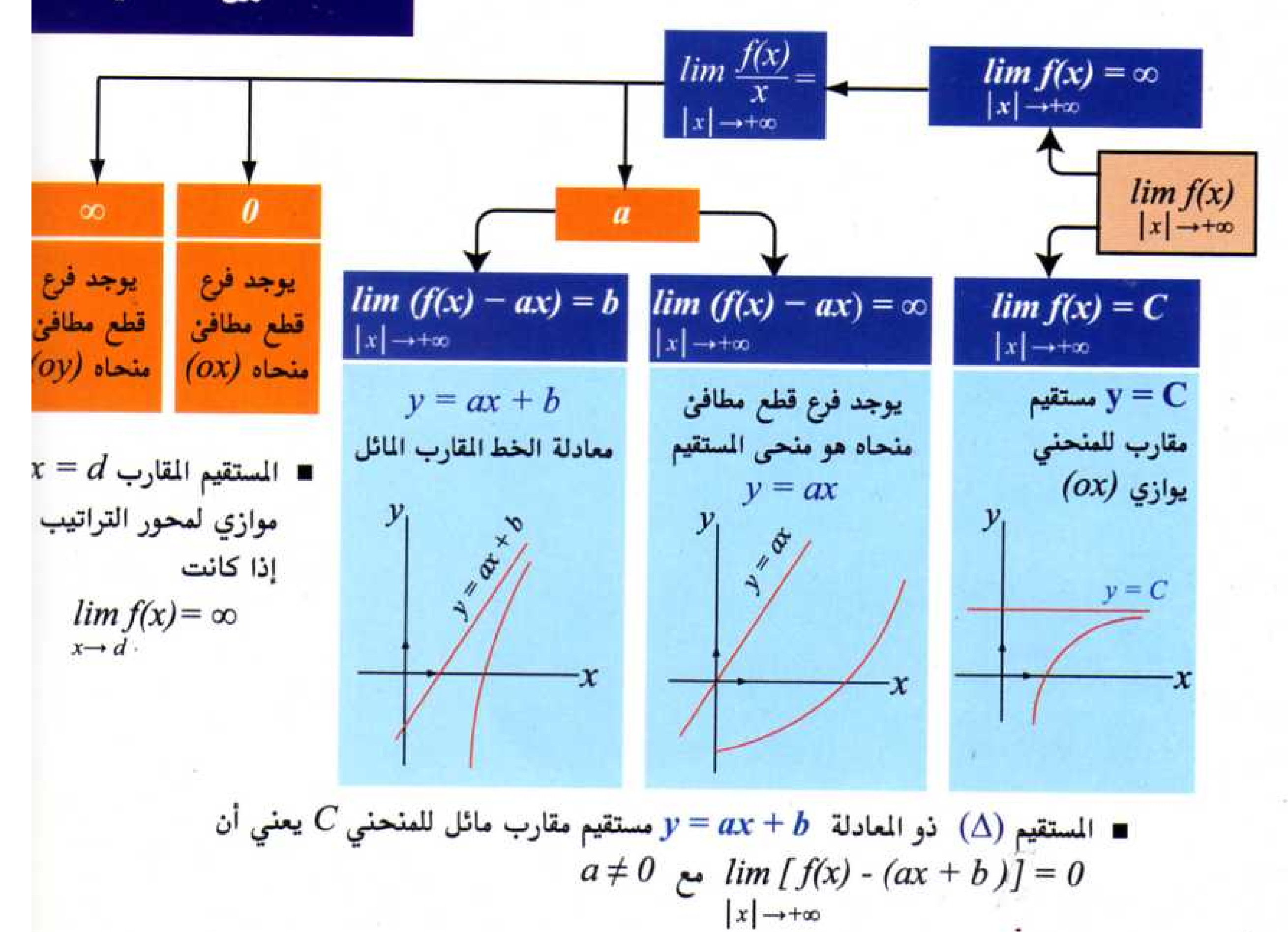
إذا كان $a \equiv b\,[n]$ و $b \equiv c\,[n]$ فإن $a \equiv c\,[n]$

نظريات الاشتقاق

الدالة	U/V V لا تنعدم على مجالها	$1/V$ V لا تنعدم على مجالها	U^n $(n \in N, n \geq 2)$	$U.V$	$\lambda.U$	$U+V$
الدالة المشتقة	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	$-\frac{V'}{V^2}$	$n.U'U^{n-1}$	$U'V+V'U$	$\lambda.U'$	$U'+V'$

الدالة	$f(x)=0$	$f(x)=a$	$f(x)=x^n$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$
الدالة الأصلية	$F(x)=C$	$F(x)=ax+C$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C$
مجال قابليتها	R	R	R	$]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$

الفروع اللانهائية



■ المستقيم المقارب $x = d$ موازي لمحور التراتيب إذا كانت $\lim_{x\to d} f(x) = \infty$

■ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني C يعني أن $\lim_{|x|\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ مع $a \neq 0$

الأعداد الأولية

تعريف: نقول أن العدد الطبيعي n أنه أولي معناه أنه يقبل قاسمين فقط في N هما 1 و العدد نفسه

- **مبرهنة بيزو:** نقول عن العددان الصحيحان a و b أنهما أوليان فيما بينهما إذا وجد عددان صحيحان x و y يحققان: $ax + by = 1$

خواص:

- إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان x و y بحيث: $ax + by = d$
- إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a عدد أولي مع جدائهما bc

الأعداد المركبة

قواعد الحساب

الشكل الجبري لعدد مركب هو : $z = x + iy$

مع :

x و y أعداد حقيقية و $i^2 = -1$

x هو الجزء الحقيقي و y هو الجزء التخيلي

$z = 0$ يكافئ $x = 0$ و $y = 0$

z حقيقي يكافئ $y = 0$

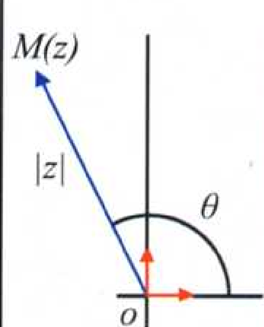
z تخيلي صرف يكافئ $x = 0$

$z' = z$ يكافئ $x = x'$ و $y = y'$

$z + z' = x + x' + i(y + y')$

دستور أولر

- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$



مع $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}$ (x' . y' . x . y : أعداد حقيقية)

مرافق عدد مركب

إذا كان $z = x + iy$ فإن مرافق z هو العدد $\bar{z} = x - iy$

خواص المرافق

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$
- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}'}$
- $\bar{\bar{z}} = z$

الشكل المثلثي و الأسي

إذا كان $z \neq 0$

- $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{oM}) = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ و $k \in Z$

img431.jpg

■ **مبرهنة غوص:** c،b،a ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة إذا كان العدد a يقسم جداء العددين $b.c$ وكان أوليا مع أحدهما فهو يقسم الآخر.

■ **تحليل عدد إلى جداء عوامل أولية :** كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يمكن كتابته على شكل وحيد :

$$n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times ...... \times P_k^{\alpha_k}$$

P_i أعداد أولية حيث : $P_1<P_2<.....P_k$

α_i أعداد طبيعية.

■ عدد قواسم n هو : $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1) \times ...... \times (\alpha_k+1)$

دستور موافر

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

في الهندسة

$$AB = |z_B - z_A|$$

إذا كان z_A و z_B و z_C أعداد مركبة مختلفة :

$$k \in Z \quad \begin{cases} (\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi \\ (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) + 2k\pi \end{cases}$$

لاحقة مرجح

a و b عددان حقيقيان حيث $a + b \neq 0$.

G مرجح الجملة $\{(A,a), (B,b)\}$:

$\dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$ هي لاحقة النقطة G

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \qquad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

خواص z و z' عددان مركبان غير معدومين حيث $z = re^{i\theta}$ و $z' = r'e^{i\theta'}$ مع $r=|z|$ و $r' = |z'|$

$\arg(zz') = \arg z + \arg z'$	$\|zz'\| = \|z\|.\|z'\|$	$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg z'$	$\left\|\frac{1}{z}\right\| = \frac{1}{\|z\|}$	$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{i(-\theta')}$
$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg z - \arg z'$	$\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
$\arg(z^n) = n\arg z$	$\|z^n\| = \|z\|^n$	$z^n = r^n e^{i(n\theta)}$
$\arg(\bar{z}) = -\arg z$	$\|\bar{z}\| = \|z\|$	$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$

التحويلات النقطية في المستوي

$f : P \to P \quad M'(x',y') \quad M(x,y)$

$M \mapsto M'$

الشكل المركب	خواص	تعريف M' ـ النقط الصامدة	ال
$z' = z + z_{\vec{u}}$ حيث $z_{\vec{u}}$ هي لاحقة $\vec{u}$	$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ متوازي أضلاع	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$: كل النقط صامدة إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$: لا توجد نقاط صامدة	$T_{\vec{u}}$ إ N'
$z' = -z + 2z_w$ حيث z_w هي لاحقة w إذا كانت O هي المركز فإن $z' = -z$	$\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$ $MNM'N'$ متوازي أضلاع	$\overrightarrow{WM'} = -\overrightarrow{WM}$ المركز هي النقطة الصامدة الوحيدة	S_W تنا
	$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ شبه منحرف متساوي الساقين	كل نقطة من Δ هي نقطة صامدة. إذا كان $M \in \Delta$ لدينا $M' = M$ إذا كان $M \notin \Delta$ لدينا Δ محور تناظر القطعة المستقيمة MM'	S_Δ تنا M'
$z' - z_w = k(z' - z_w)$ حيث z_w هي لاحقة w إذا كانت O هي المركز فإن $z' = kz$	$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ $MNN'M'$ شبه منحرف	$\overrightarrow{WM'} = k\overrightarrow{WM}$ إذا كان $k \neq 1$ فإن W هي النقطة الصامدة الوحيدة إذا كان $k = 1$ فإن كل النقطة صامدة.	$W,k)$ ونسبت N'
$z' - z_w = e^{i\alpha}(z' - z_w)$ إذا كانت O هي المركز فإن $z' = e^{i\alpha} z$	$M'N' = MN$ $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha + 2k\pi$ $k \in Z$	إذا كان $M \neq W$ فإن : $\begin{cases} WM' = WM \\ (\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \alpha + 2k\pi \end{cases}$ W هي النقطة الصامدة الوحيدة	(W,α) N'
$z' - z_w = ke^{i\alpha}(z' - z_w)$ إذا كانت O هي المركز فإن $z' = ke^{i\alpha} z$	$M'N' \neq MN$ $(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \alpha + 2k\pi$ $k \in Z$	إذا كان $M \neq W$ فإن W هي النقطة الصامدة الوحيدة	$,W)$ M'

img433.jpg

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) =$	$l+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم التعيين

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f\,.\,g)(x) =$	$l\,.\,l'$	$\pm\infty$	عدم التعيين	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	l	$l \neq 0$	l	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$l' \neq 0$	0	$\pm\infty$	l'	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (\frac{f}{g})(x) =$	l/l'	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	عدم التعيين	عدم التعيين

■ توجد أربعة أشكال لعدم التعيين وهي :

• $0 \times \infty$ ، $+\infty - \infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

■ بجوار x_0 أو $+\infty$ أو $-\infty$

• إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

• إذا كانت $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = l$

فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$

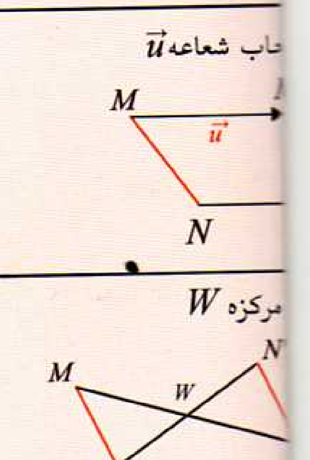
■ نهاية دالة مركبة

• إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ وإذا كانت $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ حيث c,b,a أعداد حقيقية

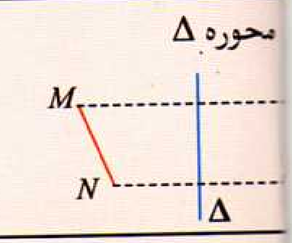
فإن : $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = c$

ويل النقطي

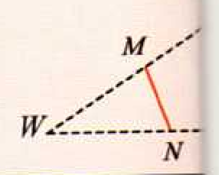
حاب شعاعه $\vec{u}$



مركزه W

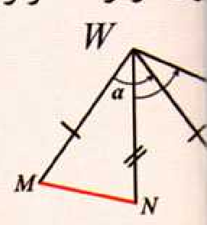


محوره Δ

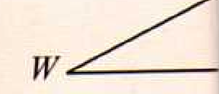


حاكي مركزه W

غير معدومة



ران مركزه W و زاويته α.



تشابه مباشر مركزه W

زاويته α و نسبته k.